数理解析研究所講究録
557巻 1985年 113-137

制御過程の三面鏡理論一連続編

九大　経済　　岩本誠一
(Seiichi Iwamoto)

1. はじめに

最適化問題の分類にはいくつかの基準が考えられる。例えば，制約式についてはその有無，線形非線形性，確率確定性，および微分積分差分表現に依る。変数については単複，有界非有界，および離散連続の区別がある。目的関数のスカラーベクトル値，および線形凸非線形性などに依っても分類される。また，時間の有無および離散連続によってアプローチも異なる場合が多い。

時間を含んだ動的最適化問題はポントリャーギンの最大原理[24]およびベルマンの最適性の原理（ベルマン方程式）[1]によりほぼ同時期に解析され，両者のアプローチにはそれぞれ一長一短があることは現在では周知のとおりである。動的最適化問題の典型としての制御問題は歴史的にはいわゆる古典的変分問題にさかのぼる。その変分法においてはオイラー方程式が極めて重要な役割りを果していることは言うまでもない。

他方，陽に時間を含まない最適化問題としては，線形・非線形の数理計画法があり，単体法やクーン・タッカー条件[23]

が最適解の構成，特徴づけ，およびアルゴリズムに大いに役立っている。このように各問題に応じてその問題特有の解法なり解の特徴づけの理論が構成されている。

しかし，本論文では，離散編[21]に続いて，連続時間確定的制御問題という特定の動的最適化問題に固定していくつかの可能なアプローチを試みる。それは (1)動的計画に現れる状態と利得の役割りを交換する逆，(2) 時間の流れを逆進させる反転，および (3) 凹凸性に基づいて原問題を価値変数(ラグランジュ乗数) の問題に転化する双対である。与えられた(主)問題に対してこれら3つの発想を試みることが可能だろうか。可能ならば，その問題の表現，最適解の構造とそれへの接近，および主問題ないしその最適解との対応関係を求め，更には主を含めた四者間の関係を洗い出すことである。これを三面鏡問題という。逆理論[2-5, 10-12, 14, 16, 17, 19, 20, 22]，反転理論[13-15, 18]，および双対理論[2, 3, 6-8, 23-25]は，それぞれ著者によって微妙なニュアンスの相違はあるが，個々にしかも固有の問題について展開されている。しかし，本論文では三者の相互関係に焦点を絞って議論する。このため，主問題に制御問題を選んだ。

第2節では，逆・反転・双対を同時に議論できる主過程を動的計画法で解析する。第3節では，ある可逆性の下でこの

逆過程を導入して，主過程との逆関係 ── 逆過程の最大値関数は主過程の最小値関数の逆関数である ── の成立を示す。第4節では，時間の流れと伴に評価関数・ダイナミックスをも"逆進"させた反転過程を導入し，反転関係 ── 主過程の最小値関数が反転過程の終端関数になり，反転過程の最大値関数は主過程の終端関数である ── の成立を示す。主・逆・反転のいずれの過程もベルマン方程式に基づいて解析されている。第5節では，ミニマックス定理を用いてミニマックス値をマックスミニ値に替えることによって主(最小化)問題を双対(最大値)問題に転化している。これを2種類の方法で行う。第一のラグランジュ双対過程は主過程に対するラグランジュ乗数関数が構成する過程である。主過程が最小化問題のとき，双対変数を導入した鞍点過程に適当な凸性があれば，クーン・タッカー条件より双対可能になる。第二の準線型化双対過程はベルマンの準線型化技法[2,3,5]を用いて導入される。両双対問題とも制御問題に対しては同値になっている。双対関係は「主過程の最小値は双対過程の最大値に等しい」になる。また，両双対過程とも2段階最大化問題になり，前半の最大化はベルマン方程式で解かれ，結局，動的計画法で解かれることになる。第6節では，1次元状態空間上の線形状態方程式・自乗評価関数をもつ制御過程に対して，逆

反転・双対の演算を1回ないし2回行って得られる種々の過程を具的的に導き，その最適解を与える。

2. 主過程と動的計画

一般に制御過程はポントリャーギンの最大原理[24]によって解かれているが，本論文では離散論[21]と同様に，ベルマンの最適性の原理に基づく動的計画法[1]によって解析する。ベルマンの方法は以下制御過程の三面を浮きぼりにするのに極めて好都合であることがわかる。

さて，有限・連続時間制御過程は次のように表される[25]。

(主過程)

$$\text{Minimize} \int_0^T f(x,u)\,dt + f_T(x(T))$$

$$\text{subject to (i)} \quad \dot{x} = g(x,u) \qquad 0 \leqq t \leqq T$$

$$\text{(ii)} \quad x(0) = c$$

$$\text{(iii)} \quad (x,u) \in R$$

ここに $0 < T < \infty$ で，Rは2次元ユークリッド空間R^2の空でない凸集合である。$f, g : R \to R^1$，$f_T : R^1 \to R^1$ は連続とする。この過程を以下主過程という。これを動的計画法(DP)で解析すると次のようになる。各t $(0 \leqq t \leqq T)$と各$x \in S$に対して

$$F(t,x) = \mathrm{Min}\left[\int_t^T f(x,u)\,ds + f_T(x(T)) \;\middle|\; \dot{x} = g(x,u) \quad t \leqq s \leqq T,\ x(t) = x,\ (x,u) \in R\right] \tag{1}$$

とおく。ただし，SはRの第一軸への正射影とする。すなわち

$$S = \{x \mid (x, u) \in R \quad ある\ u \in R^1\}.$$

関数 $F = F(t, x) : [0, T] \times S \to R^1$ を主過程の<u>最小値関数</u>という。

これはいわゆる<u>ベルマン方程式</u>

$$\text{(BE)} \quad \begin{cases} F(T, x) = f_T(x) & (2) \\ -F_t = \underset{u \in R_x}{\mathrm{Min}} \left[f(x, u) + g(x, u) F_x \right] & (3) \end{cases}$$

を満たす。ただし R_x は R の x における切り口とする。すなわち

$$R_x = \{u \mid (x, u) \in R\}.$$

主過程の最小値は (2), (3) を解いて $F(0, c)$ で与えられる。各 t, x に対して (3) の最小値に達する u を $u^*(t, x)$ として得られる関数 $u^* = u^*(t, x)$ を 主過程の<u>最適制御</u>という。

3. 逆鏡

次に，主過程に対する<u>逆過程</u>を導びこう。主過程が可逆になる為に，本節では条件

(a) $f_T(x)$ は x の連続狭義増加関数である．

(b) $F(t, x)$ は各 t に対して x の連続狭義増加関数である．

を仮定する。条件 (b) は例えば，$f(\cdot, u)$, $g(\cdot, u)$, $f_T(\cdot)$ の連続狭義増加性および R_x の1次同次性の下では成立している [19]。

さて，(1) の Min に到達したときの $F(t, x)$ を y で表す。すなわち

$$y(t) = F(t, x(t)) \tag{4}$$

とすると，最適軌道に対して

$$y(t) = \int_t^T f(x,u)ds + f_T(x(T)) \tag{5}$$

$$\frac{dx(s)}{ds} = g(x(s), u(s)) \qquad t \leq s \leq T \tag{6}$$

となる。(5)を t で微分，(6)を t から T まで s で積分すると，それぞれ

$$\dot{y}(t) = -f(x,u) \tag{5$'$}$$

$$x(t) = -\int_t^T g(x,u)ds + x(T) \tag{6$'$}$$

になる。(2)，(4)より

$$y(T) = f_T(x(T)). \tag{7}$$

条件(a)より，f_T が可逆すなわち逆関数 f_T^{-1} が存在するから

$$x(T) = f_T^{-1}(y(T)). \tag{7$'$}$$

したがって，このとき，次の逆過程が考えられる。

（逆過程）

$$\text{Maximize} \; -\int_0^T g(x,u)dt + x(T)$$

subject to (i) $\dot{y} = -f(x,u) \qquad 0 \leq t \leq T$

(ii) $y(0) = c$

(iii) $(x,u) \in R$

(iv) $y = F(t,x)$.

さらに，条件(b)より，各 t に対して $F(t,\cdot)$ が可逆だから，(iv)より

$x = F^{-1}(t,y)$ となり，y -プロセスで表現すると

（逆過程）

$$\text{Maximize} \; -\int_0^T g(F^{-1}(t,y),u)dt + f_T^{-1}(y(T))$$

subject to (i) $\dot{y} = -f(F^{-1}(t,y),u) \qquad 0 \leq t \leq T$

(ii) $y(0)=c$

(iii) $(F^{-1}(t,y),u)\in R$

になる。逆過程のベルマン方程式は次のようになる。

$$G(t,y)=\mathop{\mathrm{Max}}\left[-\int_t^T g(F^{-1}(t,y),u)ds+f_T^{-1}(y(T))\ \middle|\ \dot{y}=-f(F^{-1}(s,y),u)\quad t\leq s\leq T,\ y(t)=y \atop (F^{-1}(s,y),u)\in R\right]_{0\leq t\leq T} \tag{8}$$

で定義される最大値関数 $G=G(t,y)$ は関数方程式

$$\text{(BE)}\quad\begin{cases} G(T,y)=f_T^{-1}(y) & (9)\\ -G_t=\mathop{\mathrm{Max}}_{\substack{u\in R_x\\ x=F^{-1}(t,y)\\ (x,u)\in R}}\left[-g(F^{-1}(t,y),u)-f(F^{-1}(t,y),u)G_y\right] & (10)\end{cases}$$

を満たす。各 t を固定すると最小値関数 $F(t,\cdot)$ と最大値関数 $G(t,\cdot)$ は互に逆関数であり，$u^*=u^*(t,x)$，$\hat{u}=\hat{u}(t,y)$ をそれぞれ主，逆の過程の最適政策とすれば，

$$\hat{u}(t,y)=u^*(t,F^{-1}(t,y)),\quad u^*(t,x)=\hat{u}(t,G^{-1}(t,x)) \tag{11}$$

なる関係が成立する。これが逆定理の主張である[9-12, 14, 16, 17, 19, 22]。

離散時間問題に対する逆過程には再帰型と加法型の2種類があったが[19]，連続時間では常に積分で評価される（したがって必然的に加法型になる）目的関数を取り扱っているので，2種類の逆過程は一致して，1種類のみになっている。

4. 反転鏡

本節では，時間とともに評価関数・ダイナミックスを逆向

きにした反転過程を導入しよう。主過程の最小値を $u(x(0))$ で表すと，最適軌道に対しては

$$u(x(0)) = \int_0^T f(x, u)\,dt + f_T(x(T)). \tag{12}$$

よって

$$\begin{aligned} f_T(x(T)) &= -\int_0^T f(x, u)\,dt + u(x(0)) \\ &= \int_T^0 f(x, u)\,dt + u(x(0)). \end{aligned} \tag{12'}$$

他方，ダイナミックスは最適軌道に対して成立している。すなわち

$$\dot{x}(t) = g(x, u) \quad , \quad x(T)：所与$$

と解釈できる。よって次の反転過程が導入される。

反転過程

$$\text{Maximize} \int_T^0 f(x, u)\,dt + u(x(0))$$

$$\begin{aligned} \text{subject to (i)} \quad & \dot{x} = g(x, u) \qquad T \geqq t \geqq 0 \\ \text{(ii)} \quad & x(T) = C \\ \text{(iii)} \quad & (x, u) \in R. \end{aligned}$$

この最大値は計算するまでもなく $f_T(c)$ である。条件 (ii) $x(T)=c$ と $T \geqq t \geqq 0$ は時刻 T でプロセスが $x(T)=c$ から出発して (i) のダイナミックスにしたがって時刻 $t=0$ で $x(0)$ で終ることを意味している。この履歴に対するプロセスの評価が $\int_T^0 f(x,u)\,dt + u(x(0))$ である。

$$K(t, x) = \operatorname{Max}\left[\int_t^0 f(x, u)\,ds + u(x(0)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \dot{x} = g(x, u) \quad t \geqq s \geqq 0,\ x(t) = x, \\ (x, u) \in R \end{array}\right] \tag{13}$$

$$T \geqq t \geqq 0, \quad x \in S$$

とすれば，最大値関数 $K=K(t,x)$ はベルマン方程式

$$\text{(BE)} \quad \begin{cases} K(0,x) = u(x) & (14) \\ K_t = \underset{u \in R_x}{\mathrm{Max}}\left[-f(x,u) - g(x,u)K_x\right] & (15) \end{cases}$$

を満たす。この最適政策を $\tilde{u}=\tilde{u}(t,x)$ とすれば，反転定理は

$$K(t,x) = F(t,x), \quad \tilde{u}(t,x) = u^*(t,x) \tag{16}$$

を主張している[13−15]。すなわち，主過程が最小値関数 $u=u(x)$ と最適政策 $\pi^*=\pi^*(t,x)$ をもてば，反転過程が最大値関数 $f_T=f_T(x)$ と最適政策 $\pi^*=\pi^*(t,x)$ をもち，逆も成立する。これは，主と反転の両過程間では終端利得関数と最適利得関数が入れ替り，最適政策は不変であることを示している。

ここで逆演算と反転演算が可換であること，すなわち，逆過程の反転（反転逆過程）と反転過程の逆（逆反転過程）が一致することを示そう。まず，反転逆過程を導びく。逆過程において

$$-\int_0^T g(F^{-1}(t,y),u)\,dt + f_T^{-1}(y(T)) = v(y(0)) \tag{17}$$

とおくと，

$$f_T^{-1}(y(T)) = \int_T^0 [-g(F^{-1}(t,y),u)]\,dt + v(y(0)) \tag{18}$$

となる。逆定理より，$v(y(0)) = u^{-1}(y(0))$ だから，逆過程を反転すると (17), (18) より

$$\widehat{\text{反}} \quad \mathrm{Minimize} \int_T^0 [-g(F^{-1}(t,y),u)]\,dt + u^{-1}(y(0))$$

（転逆過程）

$$\text{subject to (i)}\quad \dot{y} = -f(F^{-1}(t, y), u) \qquad T \geqq t \geqq 0$$

$$\text{(ii)}\quad y(T) = c$$

$$\text{(iii)}\quad (F^{-1}(t, y), u) \in R$$

になる。次に反転過程の逆を考えよう。

$$z = K(t, x) \tag{19}$$

とおくと

$$z(0) = u(x(0)). \tag{20-1}$$

また最適軌道 x と最適制御 u に対して

$$\dot{z} = -f(x, u) \tag{20-2}$$

$$x(0) - x(t) = \int_t^0 g(x, u)\,ds \tag{20-3}$$

が成り立っている。(20-1), (20-3) より

$$x(t) = -\int_t^0 g(x, u)\,dt + u^{-1}(z(0)) \tag{21}$$

したがって，(19), (20-2), (21) より，次の逆反転過程が得られる。

（逆反転過程）

$$\text{Minimize}\quad -\int_T^0 g(K^{-1}(t, z), u)\,dt + u^{-1}(z(0))$$

$$\text{subject to (i)}\quad \dot{z} = -f(K^{-1}(t, z), u) \qquad T \geqq t \geqq 0$$

$$\text{(ii)}\quad z(T) = c$$

$$\text{(iii)}\quad (K^{-1}(t, z), u) \in R.$$

ここで (16) より $F = K$ だから，上述の y-プロセスと z-プロセスは一致する。すなわち，反転逆と逆反転の両過程は一致する。もちろん，この共通の最小値は $f_T^{-1}(c)$ で与えられる。

5. 双対鏡

まず，ラグランジュ乗数関数 $\lambda=\lambda(t)$ が生成する双対過程の構成を考えよう。その本質的な考え方はクーン・タッカーの定理 [23] による。すなわち，適当な凸性の下では，主過程が最適解 (x^*, u^*) をもつための十分条件（しかも制約想定の下では必要条件）は λ^* が存在して鞍点過程

（鞍点過程）
$$\operatorname*{Minimize}_{x,u}\ \operatorname*{maximize}_{\lambda}\ L(x,u;\lambda)$$
$$\operatorname*{Maximize}_{\lambda}\ \operatorname*{minimize}_{x,u}\ L(x,u;\lambda)$$

がミニマックス解 $(x^*, u^*; \lambda^*)$ をもつこと，すなわち，

$$L(x^*, u^*; \lambda) \leq L(x^*, u^*; \lambda^*) \leq L(x, u; \lambda^*) \qquad {}^{\forall}(x,u), {}^{\forall}\lambda \tag{22}$$

となることを用いる。ここに L はラグランジュ関数

$$L(x,u;\lambda) = \int_0^T f(x,u)dt + f_T(x(T)) - \int_0^T \lambda(\dot{x} - g(x,u))dt \tag{23}$$

である。

$L(x,u;\lambda)$ に対する (x,u)-凸性かつ λ-凹性（実は線形性）の下で双対問題を考える。Wilson [25] は連続時間問題を $\Delta\,(>0)$ で離散近似してその双対問題を構成し $\Delta\downarrow 0$ としてこの連続型問題の双対問題を得ているが，以下では直接連続型のまゝで双対問題を構成する。記号の簡略化のために Max を M，Min を m で表す。

主過程の最小値

$$= \underset{x,u}{\mathrm{Min}} \left[\int_0^T f(x,u)dt + f_T(x(T)) \;\middle|\; \dot{x} = g(x,u),\ x(0) = c,\ (x,u) \in R \right]$$

$$= \underset{x,u}{\mathrm{Min}}\ \underset{\lambda}{\mathrm{Max}} \left[\int_0^T f(x,u)dt + f_T(x(T)) - \int_0^T \lambda(\dot{x} - g(x,u))dt \right]$$

$$= \underset{\lambda}{\mathrm{Max}}\ \underset{x,u}{\mathrm{Min}} \left[\qquad〃\qquad \right]$$

$$= \underset{\lambda}{M}\ \underset{x,u}{m} \left[\int_0^T [f(x,u) + \lambda g(x,u)]dt + \lambda(0)x(0) - \lambda(T)x(T) + \int_0^T \dot{\lambda} x dt + f_T(x(T)) \right]$$

$$= \underset{\lambda}{M}\ \underset{x}{m} \left[\underset{u}{m} \int_0^T [f(x,u) + \lambda g(x,u)]dt + \lambda(0)x(0) + f_T(x(T)) + \int_0^T \dot{\lambda} x\, dt - \lambda(T)x(T) \right]$$

$$= \underset{\lambda}{M}\ \underset{x}{m} \left[\int_0^T \underset{u}{m} [f(x,u) + \lambda g(x,u)]dt + \qquad〃\qquad \right]$$

$$= \underset{\lambda}{M}\ \underset{x}{m} \left[\int_0^T [h(\lambda,x) + x\dot{\lambda}]dt + \lambda(0)x(0) + f_T(x(T)) - \lambda(T)x(T) \right]$$

ただし $h(x,\lambda) = \underset{u}{\mathrm{Min}} [f(x,u) + \lambda g(x,u)]$:ハミルトニアン (24)

$$= \underset{\lambda}{M} \left[\underset{x}{m} \int_0^T [h(\lambda,x) + x\dot{\lambda}]dt + \lambda(0)x(0) + \underset{x(T)}{m} [f_T(x(T)) - x(T)\lambda(T)] \right]$$

$$= \underset{\lambda}{M} \left[\int_0^T \underset{x}{m} [h(\lambda,x) + x\dot{\lambda}]dt + \lambda(0)x(0) + \qquad〃\qquad \right]$$

$$= \underset{\lambda}{\mathrm{Max}} \left[\int_0^T \varphi(\lambda,\dot{\lambda})dt + c\lambda(0) + \nu_T(-\lambda(T)) \right].$$

ただし

$\varphi(\lambda,\xi) = \underset{x}{\mathrm{Min}} [h(\lambda,x) + x\xi]$; $h(\lambda,\cdot)$ の最小変換 (25)

$\nu_T(\lambda) = \underset{x}{\mathrm{Min}} [f_T(x) + x\lambda]$; f_T の最小変換 (26)

以上によって最小値問題が最大値問題に変換された。よって，次の双対過程が導びかれた。

〔双対過程〕

$$\mathrm{Maximize}\quad \lambda(0)c + \int_0^T \varphi(\lambda,\dot{\lambda})dt + \nu_T(-\lambda(T))$$

これを<u>ラグランジュ双対過程</u>（L双対過程）という。

$\dot{\lambda}=\xi$ とすれば，これはダイナミックスの下での最大値問題

（L双対過程）

$$\text{Maximize} \quad \lambda(0)c+\int_0^T \varphi(\lambda,\xi)\,dt+\nu_T(-\lambda(T))$$

$$\text{subject to} \quad \text{(i)} \quad \dot{\lambda}=\xi$$

になる．L双対過程においては $\lambda(0)$ は与えられていなくて $\dot{\lambda}(t)=\xi(t)$ の下で動き得ることに注意する必要がある。すなわち，初期"状態" $\lambda(0)$ は固定されていない。L双対過程の最大値は目的関数の加法性より，2段階最大化

$$\underset{\lambda}{\text{Max}}\left[c\lambda(0)+\int_0^T \varphi(\lambda,\dot{\lambda})\,dt+\nu_T(-\lambda(T))\right]$$

$$=\underset{d\in R^1}{\text{Max}}\left[cd+\text{Max}\left[\int_0^T \varphi(\lambda,\xi)\,dt+\nu_T(-\lambda(T)) \,\middle|\, \dot{\lambda}=\xi,\ \lambda(0)=d\right]\right]$$

によって求められる。後半の，すなわち最初に解くべき問題

$$\text{Maximize} \quad \int_0^T \varphi(\lambda,\xi)\,dt+\nu_T(-\lambda(T))$$

$$\text{subject to} \quad \text{(i)} \quad \dot{\lambda}=\xi \qquad 0\leqq t\leqq T$$

$$\text{(ii)} \quad \lambda(0)=d$$

は d を与えられた初期状態とする動的計画問題である。しかもこの問題は可逆・可反転でもあるから，逆問題・反転問題を生成することができる。

6. 三面鏡

この節では線形状態方程式・2次評価制御過程を逆・反転

双対の三面鏡に写した像過程を列挙し，その最適構造を解析しよう。まず，主過程は $R=R^2$ とすると次のようになる。

$$
(\text{主})\quad
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \int_0^T (x^2+u^2)\,dt + x^2(T)\\
&\text{s.t.}\ \ \text{(i)}\ \ \dot{x} = bx+u \qquad 0\leqq t\leqq T\\
&\qquad\ \ \text{(ii)}\ \ x(0)=c
\end{aligned}
$$

ここに b は実定数とする。これを $x\geqq 0$ に制限して $R=R^1_+\times R^1$ とした主′過程は

$$
(\text{主}')\quad
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \int_0^T (x^2+u^2)\,dt + x^2(T)\\
&\text{s.t.}\ \ \text{(i)}\ \ \dot{x} = bx+u\ ,\ x(t)\geqq 0 \qquad 0\leqq t\leqq T\\
&\qquad\ \ \text{(ii)}\ \ x(0)=c\ (\geqq 0)
\end{aligned}
$$

になる。主′過程に対して

$$
F(t,x) = \mathrm{Min}\left[\int_t^T (x^2+u^2)\,d\ \ + x^2(T)\ \Big|\ \dot{x}=bx+u\ \ t\leqq s\leqq T,\ x(t)=x,\ u\in R^1\right] \quad (29)
$$
$$
0\leqq t\leqq T,\ x\geqq 0
$$

は関数方程式

$$
(\text{BE})\quad
\begin{cases}
F(T,x) = x^2 & (30)\\
-F_t = \underset{u\in R^1}{\mathrm{Min}}\ \left[x^2+u^2+(bx+u)F_x\right] & (31)
\end{cases}
$$

を満たす。(31) は偏微分方程式 (PDE)

$$
-F_t = x^2 + bxF_x - \frac{1}{4}F_x^2 \quad ,\quad u^* = u^*(t,x) = -\frac{1}{2}F_x \qquad (31)'
$$

になり，変数分離法によって，解

$$
F(t,x) = k(t)\,x^2\,, \qquad u^*(t,x) = -k(t)\,x \qquad (32)
$$

をもつことがわかる。ここに $k=k(t)$ はリッカチ型微分方程

式(DE)

$$\dot{k} - k^2 + 2bk + 1 = 0, \quad k(T) = 1 \tag{33}$$

を満たす。$k(t) \geqq 1$ より、$F = F(t,x)$ は各tに対して $[0, \infty)$ 上で x の狭義増加関数である。もちろん連続である。したがって、主′過程の逆 すなわち 逆′過程 は

(逆)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max} \quad -\int_0^T (bx + u)\,dt + x(T) \\ &\text{s.t. (i)} \quad \dot{y} = -(x^2 + u^2), \quad y(t) \geqq 0 \quad 0 \leqq t \leqq T \\ &\quad\ \ \text{(ii)} \quad y(0) = c \ (\geqq 0) \\ &\quad\ \ \text{(iii)} \quad y = k(t)\,x^2 \end{aligned}$$

になる。これは y-プロセスだけで表すと

(逆′)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max} \quad -\int_0^T \left(b\sqrt{\frac{y}{k(t)}} + u\right) dt + \sqrt{y(T)} \\ &\text{s.t. (i)} \quad \dot{y} = -\frac{y}{k(t)} - u^2, \quad y(t) \geqq 0, \quad 0 \leqq t \leqq T \\ &\quad\ \ \text{(ii)} \quad y(0) = c \ (\geqq 0) \end{aligned}$$

になる。ベルマン方程式は

$$G(t,y) = \mathrm{Max}\left[-\int_t^T \left(b\sqrt{\frac{y}{k(t)}} + u\right) dt + \sqrt{y(T)} \;\middle|\; \dot{y} = -\frac{y}{k(t)} - u^2,\ y(s) \geqq 0,\ t \leqq s \leqq T,\ y(t) = y\right] \tag{34}$$

$$0 \leqq t \leqq T, \quad y \geqq 0$$

として

$$\text{(BE)} \quad \begin{cases} G(T, y) = \sqrt{y} & (35) \\ G_t = \displaystyle\min_{u \in R^1} \left[b\sqrt{\frac{y}{k(t)}} + u + \left(\frac{y}{k(t)} + u^2\right) G_y\right] & (36) \end{cases}$$

になる。(36) は PDE

$$G_t = b\sqrt{\frac{y}{k(t)}} + \frac{y}{k(t)} G_y - \frac{1}{4G_y}, \quad \hat{u} = \hat{u}(t,y) = -\frac{1}{2G_y} \qquad (35)'$$

になり，解

$$G(t,y) = p(t)\sqrt{y}, \quad \hat{u} = \hat{u}(t,y) = -\frac{\sqrt{y}}{p(t)} \qquad (37)$$

をもつ．ただし $p = p(t)$ は次の DE の解である。

$$\dot{p} = \frac{b}{k(t)} + \frac{p(t)}{2k(t)} - \frac{1}{2p(t)}, \quad p(T) = 1 \qquad (38)$$

リッカチ型 DE (33) と DE (38) は変換

$$p = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{i.e.,} \quad k = \frac{1}{p^2} \qquad (39)$$

を通じて同値になっている。したがって，逆関係 (11) が成立していることがわかる。PDE (31)′ と (35)′ の間には $F^{-1}(t,y) = G(t,y)$ が成立している。

次に主過程の反転を考える。(29)～(33) の解析は主過程についても成立するので，反転過程は

反転

$$\text{Max} \int_T^0 (x^2+u^2)\,dt + k(0)x^2(0)$$

$$\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad \dot{x} = bx + u \qquad T \geq t \geq 0$$

$$\text{(ii)} \quad x(T) = c$$

になる。$k(T)x^2(T) = c^2$ が最大値であり，$\hat{u}(t,x) = u^*(t,x) = -k(t)x$ が最適政策である。

L双対過程を考えよう。主過程では

$$f(x,u) = x^2 + u^2, \quad f_T(x) = x^2, \quad g(x,u) = bx + u \qquad (40)$$

だから，(19), (20), (21) より

$$h(x,\lambda) = \underset{u\in R^1}{\mathrm{Min}}\,[x^2+u^2+\lambda(bx+u)] \qquad (4.1)$$
$$= x^2+\lambda bx - \frac{\lambda^2}{4} \qquad \hat{u} = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\varphi(\xi,\lambda) = \underset{x\in R^1}{\mathrm{Min}}\,[x^2+\lambda bx - \frac{\lambda^2}{4}+\xi x] \qquad (4.2)$$
$$= -\frac{1}{4}(b\lambda+\xi)^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \qquad \hat{x} = -\frac{\lambda b+\xi}{2}$$

$$\nu_T(\lambda) = \underset{x\in R^1}{\mathrm{Min}}\,[x^2+\lambda x] \qquad (4.3)$$
$$= -\frac{1}{4}\lambda^2 \qquad \hat{x}_T = -\frac{\lambda}{2}.$$

したがって，L双対過程は

(L双対) $\mathrm{Max}\ \lambda(0)c - \frac{1}{4}\int_0^T [(\dot{\lambda}+b\lambda)^2+\lambda^2]dt - \frac{1}{4}\lambda^2(T)$

になる。 $\dot{\lambda}+b\lambda = \mu$ とおくと，ダイナミックスの下での問題

(L双対) $\mathrm{Max}\ \lambda(0)c - \frac{1}{4}\int_0^T (\lambda^2+\mu^2)dt - \frac{1}{4}\lambda^2(T)$

s.t. (i) $\dot{\lambda} = -b\lambda+\mu \qquad 0\leqq t\leqq T$

に帰着する。まず $\lambda(0)c$ を除いた問題にDP法を適用しよう。

$$H(t,\lambda) = \mathrm{Max}\left[-\frac{1}{4}\int_t^T(\lambda^2+\mu^2)ds - \frac{1}{4}\lambda^2(T)\ \middle|\ \dot{\lambda} = -b\lambda+\mu \quad t\leqq s\leqq T,\ \lambda(t)=\lambda\right] \qquad (4.4)$$

とすれば，ベルマン方程式

$$\text{(BE)}\quad \begin{cases} H(T,\lambda) = -\frac{1}{4}\lambda^2 & (4.5)\\ -H_t = \underset{\mu\in R^1}{\mathrm{Max}}\,[-\frac{1}{4}(\lambda^2+\mu^2)+(-b\lambda+\mu)H_\lambda] & (4.6)\end{cases}$$

は PDE

$$-H_t = -\frac{1}{4}\lambda^2 + H_\lambda^2 - b\lambda H_\lambda\ , \qquad \hat{\mu} = 2H_\lambda \qquad (4.6)'$$

になる。

よって，$F=F(t,x)$ を求めたときと同様に

$$H(t,\lambda)= l(t)\lambda^2 \tag{47}$$

と分離すれば，$l=l(t)$ は DE

$$\begin{cases} l(T)=-\frac{1}{4} \\ \dot{l}=-4l^2+2bl+\frac{1}{4} \end{cases} \tag{48}$$

を満たす。L双対過程の最大値は

$$\underset{\lambda(0)\in R^1}{\mathrm{Max}}\left[c\lambda(0)+l(0)\lambda^2(0)\right]=-\frac{l(0)}{4}c^2 \quad , \quad \hat{\lambda}(0)=-\frac{c}{2l(0)} \tag{49}$$

である。双対定理より，これは主過程の最小値 $k(0)c^2$ に等しいから

$$-\frac{l(0)}{4}=k(0) \tag{50}$$

が成立する。ただし $k(0)$ は (33) の解 k の 0 における値である。事実 (33) の k と (48) の l は変換

$$k=-\frac{1}{4l} \qquad \text{ie,} \qquad 1+4kl=0 \tag{51}$$

を通じて同値になっている．また，最適な λ-プロセスはダイナミックス (i)

$$\dot{\lambda}=-b\lambda+2l(t)2\lambda \quad 0\leq t\leq T \ , \ \hat{\lambda}(0)=-\frac{c}{2l(0)} \tag{52}$$

を解いて

$$\lambda(t)=-\frac{c}{2l(0)}\times e^{\int_0^t[-b+4l(s)]ds} \tag{53}$$

になっている。

次に準線形化技法(*quasi-linearization technique* [3]) を用いた双対過程（Q双対過程）を導びこう。これは基本的には離散時

間の場合と同様に議論できる。すなわち次のようにミニマックス定理と部分積分の公式を用いる。

主過程の最小値 (54)

$$= \mathop{\mathrm{Min}}\left[\int_0^T (x^2+u^2)dt + x^2(T) \mid \dot{x} = bx+u \quad 0 \leqq t \leqq T,\ x(0)=c,\ -\infty < u < \infty\right]$$

$$= \mathop{\mathrm{Min}}_{x}\left[\int_0^T [x^2+(\dot{x}-bx)^2]dt + x^2(T) \mid x(0)=c\right]$$

$$= \mathop{\mathrm{Min}}_{x}\left[\int_0^T [x^2 + \mathop{\mathrm{Max}}_{w}[2w(\dot{x}-bx)-w^2]]dt + x^2(T) \mid x(0)=c\right]$$

$$= \mathop{\mathrm{Min}}_{x}\mathop{\mathrm{Max}}_{w}\left[\int_0^T [x^2-2bxw-w^2]dt + 2\int_0^T w\dot{x}\,dt + x^2(T) \mid x(0)=c\right]$$

$$= \mathop{\mathrm{Min}}_{x}\mathop{\mathrm{Max}}_{w}\Big[\int_0^T (x^2-2bwx)dt + 2w(T)x(T) - 2w(0)x(0)$$
$$- 2\int_0^T \dot{w}x\,dt + x^2(T) - \int_0^T w^2 dt \mid x(0)=c\Big]$$

$$= \mathop{\mathrm{Max}}_{w}\mathop{\mathrm{Min}}_{x}[\quad \text{〃} \quad]$$

$$= \mathop{\mathrm{Max}}_{w}\Big[\int_0^T \mathop{\mathrm{Min}}_{x}[x^2-2(bw+\dot{w})x]dt - 2cw(0) - \int_0^T w^2 dt$$
$$+ \mathop{\mathrm{Min}}_{x(T)}[x^2(T)+2w(T)x(T)]\Big]$$

$$= \mathop{\mathrm{Max}}_{w}\left[-2cw(0) - \int_0^T [(bw+\dot{w})^2+w^2]dt - w^2(T)\right]. \tag{55}$$

したがって次の準線形化双対過程（Q双対過程）が得られた。

Q双対
$$\mathrm{Max}\quad -2cw(0) - \int_0^T [(bw+\dot{w})^2+w^2]dt - w^2(T)$$

これも $bw+\dot{w}=\xi$ とすれば，ダイナミックスをもつ制御問題

Q双対
$$\mathrm{Max}\quad -2cw(0) - \int_0^T (w^2+\xi^2)dt - w^2(T)$$
$$\text{s.t. (i)}\quad \dot{w} = -bw+\xi$$

になる。 L と Q の両双対過程の間には 1次関係

$$\lambda(t) = -2\,w(t)$$

を通じて同値になっている。ダイナミックスの下での両過程の制御変数 μ, ξ は

$$\mu = \xi \tag{56}$$

なる関係にある。

(54)～(55) は連続時間過程に対して直接準線形化技法を用いた。しかし主過程を離散近似してこの技法を用いると、

$$\text{主過程の離散近似の最小値} \tag{57}$$

$$= \mathrm{Min}\left[\sum_{n=0}^{N-1}(x_n^2+u_n^2)\Delta + x_N^2 \;\middle|\; x_{n+1}=(1+b\Delta)x_n+\Delta u_n \quad 0\leqq n\leqq N-1,\; x_0=c,\; -\infty<x_n,u_n<\infty\right]$$

$$= \underset{\{x_n\}_1^N}{\mathrm{Min}}\left\{\sum_0^{N-1}\left[\Delta x_n^2+\Delta\left(\frac{x_{n+1}-(1+b\Delta)x_n}{\Delta}\right)^2\right]+x_N^2 \;\middle|\; x_0=c\right\}$$

$$= \underset{\{x_n\}}{\mathrm{Min}}\left\{\sum_0^{N-1}\left[\Delta x_n^2+\Delta\,\underset{w_n}{\mathrm{Max}}\left[2\left(\frac{x_{n+1}-(1+b\Delta)x_n}{\Delta}\right)w_n-w_n^2\right]\right]+x_N^2 \;\middle|\; x_0=c\right\}$$

$$w_n^* = \frac{x_{n+1}-(1+b\Delta)x_n}{\Delta} \qquad 0\leqq n\leqq N-1$$

$$= \underset{\{x_n\}}{\mathrm{Min}}\;\underset{\{w_n\}_0^{N-1}}{\mathrm{Max}}\left\{\sum_0^{N-1}\left[\Delta x_n^2+\Delta\cdot 2\cdot\frac{(x_{n+1}-(1+b\Delta)x_n)}{\Delta}w_n-\Delta w_n^2\right]+x_N^2 \;\middle|\; x_0=c\right\}$$

$$= \underset{\{w_n\}}{\mathrm{Max}}\;\underset{\{x_n\}}{\mathrm{Min}}\left\{\qquad \text{〃} \qquad\right\}$$

$$= \underset{\{w_n\}}{\mathrm{Max}}\;\underset{\{x_n\}}{\mathrm{Min}}\left\{\Delta x_0^2-2(1+b\Delta)x_0w_0+\sum_1^{N-1}\left[x_n^2+2\left(\frac{w_{n-1}-(1+b\Delta)w_n}{\Delta}\right)x_n\right]\right.$$
$$\left.+x_N^2+2w_{N-1}x_N-\sum_0^{N-1}w_n^2\Delta \;\middle|\; x_0=c\right\}$$

$$= \underset{\{w_n\}_0^{N-1}}{\mathrm{Max}}\left[\Delta x_0^2-2(1+b\Delta)x_0w_0-\Delta w_0^2-\sum_1^{N-1}\left[\left(\frac{w_{n-1}-(1+b\Delta)w_n}{\Delta}\right)^2+w_n^2\right]\Delta\right.$$
$$\left.-w_{N-1}^2 \;\middle|\; x_0=c\right]$$

$$\hat{x}_n = -\frac{w_{n-1}-(1+b\Delta)w_n}{\Delta} \quad 1\leqq n\leqq N,\quad \hat{x}_N = -w_{N-1} \tag{58}$$

となり，$\Delta(=\frac{T}{N})\to 0$ とすれば，前述のQ双対過程が得られる。

さて，連続時間の逆′過程

$$\text{Max} \quad -\int_0^T \left(b\sqrt{\frac{y}{k(t)}}+u\right)dt+\sqrt{y(T)}$$

(逆′)

$$\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad \dot{y}=-\frac{y}{k(t)}-u^2, \quad y(t)\geqq 0 \qquad 0\leqq t\leqq T$$

$$\text{(ii)} \quad y(0)=c\ (\geqq 0)$$

のL双対過程を求めよう。まず，ラグランジュアン $G=G(y,u;\lambda)$ は

$$G(y,u;\lambda)=-\int_0^T \left(b\sqrt{\frac{y}{k(t)}}+u\right)dt+\sqrt{y(T)}-\int_0^T \lambda\left(\dot{y}+\frac{y}{k(t)}+u^2\right)dt$$

となる。ここで

$$f(y,u)=-\left(b\sqrt{\frac{y}{k(t)}}+u\right), \qquad f_T(y(T))=\sqrt{y(T)}, \qquad g(y,u)=-\frac{y}{k(t)}-u^2$$

より (40)～(43) と同様にすると

$$h(y,\lambda)=-b\sqrt{\frac{y}{k(t)}}-\lambda\frac{y}{k(t)}+\frac{1}{4\lambda} \qquad u^*=-\frac{1}{2\lambda}$$

$$\varphi(\lambda,\xi)=\frac{b^2}{4k(t)}\times\frac{1}{\frac{\lambda}{k(t)}-\xi}+\frac{1}{4\lambda} \qquad y^*=\frac{b^2}{4k(t)}\times\frac{1}{\left(\frac{\lambda}{k(t)}-\xi\right)^2}$$

$$\xi=\dot{\lambda}$$

$$\nu_T(\lambda)=-\frac{1}{4\lambda} \qquad y^*=\frac{1}{4\lambda^2}$$

になる。よって，L双対逆′過程

$$\text{Min} \quad \lambda(0)c+\int_0^T \varphi(\lambda,\dot{\lambda})dt+\nu_T(-\lambda(T))$$

は，$b>0$ $(b<0)$ のとき，

(L双対逆′)

$$\mathrm{Min}\quad \lambda(0)c+\int_0^T\left(\frac{b^2}{4k(t)}\cdot\frac{1}{\frac{\lambda}{k(t)}-\dot{\lambda}}+\frac{1}{4\lambda}\right)dt+\frac{1}{4\lambda(T)}$$

$$\text{s.t.}\quad \text{(i)}\quad \lambda(t)>0 \qquad 0\leqq t\leqq T$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\lambda(t)}{k(t)}-\dot{\lambda}(t)<0 \quad \left(\frac{\lambda(0)}{k(0)}-\dot{\lambda}(t)>0\right)$$

になる。これは $\frac{\lambda}{k(t)}-\dot{\lambda}=\mu$ とおくと，$b>0$ $(b<0)$ のとき，

$$\mathrm{Min}\quad \lambda(0)+\frac{1}{4}\int_0^T\left(\frac{b^2}{k(t)}\cdot\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}\right)dt+\frac{1}{4\lambda(T)}$$

$$\text{s.t.}\quad \text{(i)}\quad \dot{\lambda}=\frac{\lambda}{k(t)}-\mu,\quad \lambda(t)>0 \qquad 0\leqq t\leqq T$$

$$\text{(ii)}\quad \mu(t)<0 \quad (\mu(t)>0)$$

となり，ダイナミックスをもつ最適化問題に表される。

おわりに

本論文では，連続時間の(主)制御過程を三面鏡 —— 逆鏡(I)，反転鏡(R)，双対鏡(D) —— に写し，主過程と3つの像過程の表現と最適構造を中心に解明した。逆鏡については連続過程では，離散時間に対する再帰型逆鏡(I_r)と加法型逆鏡(I_a)の2つの逆鏡が一致している。反転鏡は，積分で表される目的関数を取り扱っているため，離散連続の違いは特に見られなかった。双対鏡については連続過程では，離散過程と同じくラグランジュ双対鏡(D_ℓ)と準線形化双対鏡(D_q)があり，離散

過程と同様な関係が成立している。

本論文では離散編とともに，制御過程の三面を論じたが，今後は配分過程やその他の最適化問題に対する三面を含む多面性を浮きぼりにする問題が考えられるのではないだろうか。

参考文献

[1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press New Jersey 1957.

[2] ――――――, Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol. I Linear Equations and Quadratic Criteria; Vol. II Nonlinear Processes, Academic Press, New York, 1967; 1971.

[3] ――――――, Quasi-linearization and upper and lower bounds for variational problems, Quart. Appl. Math. **19** (1962), 249-250.

[4] R. Bellman and R. Kalaba, An inverse problem in dynamic programming and automatic control, J. Math. Anal. Appl. **71** (1963), 322-325.

[5] R. Bellman, Methods of Nonlinear Analysis, Vol's. I, II, Academic Press, New York, 1969; 1973.

[6] V. G. Boltyanskii, Mathematical Methods of Optimal Control, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

[7] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics Vol. I, Wiley (Interscience), New York, 1943, p.230-238.

[8] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, Calculus of Variations, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

[9] S. Iwamoto, Inverse dynamic programming I, II, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **30** (1976), 25-42; **31** (1977), 25-44.

[10] ————, Inverse theorem in dynamic programming I, II, III, J. Math. Anal. Appl. **58** (1977), 113-134; 249-279; 439-448.

[11] 岩本誠一, 逐次決定過程としての動的計画論(I), (II), オペレーションズ・リサーチ **22** (1977), 427-434; 496-501.

[12] S. Iwamoto, An inverse theorem between main and inverse dynamic programming: infinite-stage case, in "Dynamic Programming and Its Applications", Ed. M.L. Puterman, 319-334, Academic Press, New York, 1978.

[13] ————, Reversed dynamic programming on general state space, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **32** (1978), 267-276.

[14] 岩本誠一, 動的計画の理論と応用, 数学 **31** (1979), 331-348.

[15] S. Iwamoto, Reversed control processes, Bull. Math. Statist. **19** (1980), 1-11.

[16] ————, Inversion of dynamic programs and its applications to allocation processes, J. Math. Anal. Appl. **81** (1981), 474-

496.

[17] S. Iwamoto, A new inversion of continuous-time optimal control processes, J. Math. Anal. Appl. **82** (1981), 49-65.

[18] ————, Reverse function, reverse program, and reverse theorem in mathematical programming, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 1-19.

[19] 岩本誠一，制御過程・配分過程の動学的逆理論，経済学研究 **47** (1983), 307-328.

[20] ————，多段配分過程 …… 利益最大化対コスト最小化，第4回数理計画シンポジウム論文集 (1983・神戸) 91-107.

[21] ————，制御過程の三面鏡理論 ——離散編，経済学研究 **49** (1984), 165-181.

[22] S. Iwamoto, A dynamic inversion of the classical variational problems, J. Math. Anal. Appl. **100** (1984), 354-374.

[23] H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Nonlinear programming, Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, J. Neyman (Ed.), Univ. of California Press, Berkeley, Calif. 1951, 481-492.

[24] L.S. Pontryagin and V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mischenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley, New York, 1962

[25] R. Wilson, Computation of optimal controls, J. Math. Anal. Appl. **14** (1966), 77-82